Sei $\beta$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$.

**Satz:** (a) Es existiert eine geordnete Basis von $V$, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von $\beta$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen aus $\{+1, -1, 0\}$ ist.

(b) Die Anzahl $d_0$ der Diagonaleinträge 0 ist die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $V \to V^\vee$, $v \mapsto \beta(v, \ )$.

(c) Die Anzahl $d_\pm$ der Diagonaleinträge $\pm 1$ ist die maximale Dimension eines Teilraums $U \subset V$, für den die Einschränkung $\pm\beta|_{U \times U}$ positiv definit ist.

(d) Insbesondere sind die Diagonaleinträge bis auf Vertauschung unabhängig von der in (a) gewählten Basis.

**Definition:** Das Tupel $(d_+, d_-)$ oder $(d_0, d_+, d_-)$ heisst die *Signatur von $\beta$*.
Die Zahl $d_+ + d_-$ heisst der *Rang von $\beta$*.
Die Zahl $d_+ - d_-$ heisst der *Index von $\beta$*.

Bew.: Wähle eine geordnete Basis $B$ von $V$. $\Rightarrow A := [\beta]_B$ symmetrisch.
$\Rightarrow \exists Q$ orthogonal $Q^T A Q$ Diagonalmatrix. Ersetze $B$ durch die von $Q$ vermittelte Basis.
$\Rightarrow$ oBdA $A$ Diagonalmatrix. Schreibe $A = \mathrm{diag}(\lambda_i r_i^2)_{i=1..n}$ mit $\lambda_i \in \{\pm 1, 0\}$, $r_i > 0$.
$D := \mathrm{diag}(r_i^{-1})_{i=1..n} \Rightarrow D^T A D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{i=1..n} \Rightarrow$ (a).

**Zusatz:** Für jede geordnete Basis $B$ von $V$ ist

$$\left.\begin{array}{l} d_+ \text{ die Anzahl der positiven Eigenwerte von } [\beta]_B \text{ mit Vielfachheiten,} \\ d_- \text{ die Anzahl der negativen Eigenwerte von } [\beta]_B \text{ mit Vielfachheiten,} \end{array}\right\}$$

$d_+ + d_-$ der Rang von $[\beta]_B$.

oben hat $Q^T A Q$ die EWe $\lambda_i r_i^2$ für $i = 1 .. n$

$$\overset{\shortparallel}{Q^{-1} A Q} \Rightarrow A \text{ hat dieselben EWe.}$$

$\exists$ dan klassische $V$ mit $\mathbb{R}^n$ so dass $\beta$ eine Diagonalmatrix $A$ entspricht.

$(v_1, \ldots, v_n) \longleftrightarrow (e_1, \ldots, e_n)$

$$\left.\begin{array}{l} V_+ := \langle \{ v_i \mid \lambda_i = +1 \} \rangle \\ V_0 := \langle \{ v_i \mid \lambda_i = 0 \} \rangle \\ V_- := \langle \{ v_i \mid \lambda_i = -1 \} \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_-.$$

oBdA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $v \in \ker(V \to V^\vee, v \mapsto \beta(v, \cdot))$ $\quad v \longleftrightarrow x \in \mathbb{R}^n$

$\iff \forall w: \beta(v, w) = 0$

$\iff \forall y \in \mathbb{R}^n: x^T \cdot A \cdot y = 0$

$\iff \forall i: x^T A e_i = 0$

$\iff \forall i: \lambda_i \neq 0: x^T e_i = 0 \iff v \in V_0.$

$\Rightarrow \dim \ker(\ldots) = d_0$

Rest Freitag.

(c) $\beta|V_+ \times V_+$ hat die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der gegebenen Basis von $V_+$.

$\Rightarrow$ positiv definit.

Sei $U \subset V$ ein Unterraum der Dimension $> d_+$.

Zu zeigen: $\underline{\beta|U \times U \text{ nicht pos. def.}}$

$$\dim(U) > d_+$$

$$\dim(V_0 \oplus V_-) = d_0 + d_-$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap (V_0 \oplus V_-)) = \underbrace{\dim(U)}_{\vee} + \underbrace{\dim(V_0 \oplus V_-)}_{\parallel} - \underbrace{\dim(U + (V_0 \oplus V_-))}_{\wedge}$$

$$> d_+ + (d_0 + d_-) - (d_+ + d_0 + d_-) = 0$$

Also ist $U \cap (V_0 \oplus V_-) \neq 0$.

Für jedes $u \in U \cap (V_0 \oplus V_-)$ gilt $\beta(u,u) \leq 0$.

$$u = \sum a_i v_i \Rightarrow \beta(u,u) = \sum a_i^2 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \leq 0.$$

$\Rightarrow \beta|U \times U$ nicht pos. def.

qed.

$(X-1)^2 - 3^2 = X^2 - 2X - 8 = (X+2)(X-4)$

**Beispiel:** Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat die Eigenwerte 4 und $-2$; der zugehörige Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ ist daher diagonalisierbar zu $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Die zugehörige Bilinearform hat dagegen die Normalform $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Diese erreicht man durch Bestimmung der Eigenräume oder durch geeigneten Basiswechsel mit einer Dreiecksmatrix, z.B. mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/\sqrt{8} \\ 0 & -1/\sqrt{8} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3/\sqrt{8} \\ 0 & -1/\sqrt{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel:** Das charakteristische Polynom der reellen symmetrischen Matrix

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}}$$

ist $(X-(a-1))^2(X-(a+2))$, woraus man schnell die Werte $d_+, d_-, d_0$ bestimmt.

$a > 1 \Rightarrow$ alle EWe $> 0$ $\rightsquigarrow$ Normalform $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$1 > a > -2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$a = -2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$a < -2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{8} \end{pmatrix} \Rightarrow D^T(S^T A S)D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$SD = \begin{pmatrix} 1 & -3/\sqrt{8} \\ 0 & 1/\sqrt{8} \end{pmatrix}$

Analog: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^T A S = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

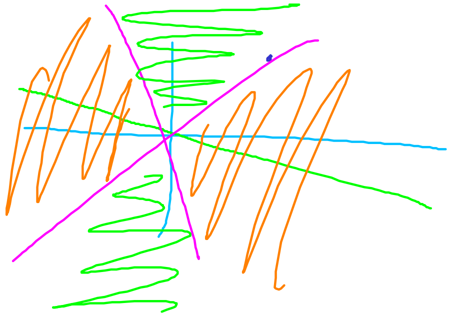
$D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T S^T A S D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $(x \; y)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 6xy + y^2 = (x+3y)^2 - 8y^2$

Dies ist $> 0 \iff |x+3y| > \sqrt{8} \cdot |y|$.

$< 0 \iff \;\; \ldots \; < \; \ldots$

$= 0 \iff |x+3y| = \sqrt{8}\,|y|$



**Variante:** Über jedem Körper $K$ mit $1+1 \neq 0$ gilt:

Basiswechsel

**Satz:** Für jede symmetrische Matrix $A$ über $K$ existiert eine invertierbare Matrix $U$, so dass $U^TAU$ eine Diagonalmatrix ist.

**Konstruktion:** *Symmetrisches Gaussverfahren:* Schreibe $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. = symmetrisch

(a) Ist $a_{11} \neq 0$, setze $S := \begin{pmatrix} 1 & -v/a_{11} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ für den Zeilenvektor $v = (a_{12}, \ldots, a_{1n})$. Dann ist $S^TAS = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ für eine symmetrische $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $B$, und die Aussage folgt durch Induktion.

(b) Ist $a_{11} = 0 \neq a_{ii}$ für ein $i > 1$, sei $S$ die Permutationsmatrix zur Vertauschung von 1 und $i$. Dann gilt Fall (a) für die Matrix $S^TAS$.

(c) Ist $a_{11} = a_{ii} = 0 \neq a_{1i}$ für ein $i > 1$, setze $S := I_n + E_{i1}$. Dann gilt Fall (a) für die Matrix $S^TAS$.

(d) Ist $a_{1i} = 0$ für alle $i \geqslant 1$, so ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ für eine symmetrische $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $B$, und die Aussage folgt durch Induktion.

(a) $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & v \\ \hline v^T & A' \end{array}\right)$ $\quad S = \left(\begin{array}{c|c} 1 & w \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$

$\Rightarrow S^TAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w^T & I_{n-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{11}w+v \\ \hline v^T & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{11}w+v \\ \hline w^Ta_{11}+v^T & * \end{array}\right)$ mit $w := \frac{-v}{a_{11}}$ wird dies $= \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, $B$ = sym.

(c) $i=2$: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & a_{12} & * \\ a_{12} & 0 & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$ $\quad S = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & & 1 \ddots 1 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{12} & * \\ * & * \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S^TAS = \left(\begin{array}{c|c} 2a_{12} & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$ und $2a_{12} = 0$.

## 10.16 Quadratische Formen

Zuerst seien $K$ ein beliebiger Körper und $n$ eine positive natürliche Zahl.

**Definition:** Ein Polynom der Form

$$\boxed{q(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \alpha + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i x_i + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j}$$

mit $\alpha$, $a_i$, $a_{ij} \in K$ heisst eine *quadratische Form in $n$ Variablen über $K$*. Sind dabei $\alpha = a_1 = \ldots = a_n = 0$, so heisst $q$ *homogen*, sonst *inhomogen*. Übersetzt in Spaltenvektoren $x \in K^n$ ist eine quadratische Form also ein Ausdruck der Form

$$q(x) \;=\; \alpha + a^T x + x^T A x \qquad (\text{Setze dabei: } a_{ij} := 0 \text{ für } i > j)$$

für beliebige $\alpha \in K$ und $a \in K^n$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$.

**Proposition:** Ist $1 + 1 \neq 0$ in $K$, so besitzt jede quadratische Form über $K$ eine eindeutige Darstellung $\alpha + a^T x + x^T A x$ mit $A$ symmetrisch.

Bew.: $x^T A x = x^T A^T x = x^T \cdot \frac{A + A^T}{2} \cdot x \qquad \frac{A+A^T}{2}$ symmetrisch.

$A$ symmetrisch $= (b_{ij}) \Rightarrow x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2 b_{ij} x_i x_j$

$\Rightarrow A$ eindeutig. qed.

Betrachte nun eine reelle quadratische Form $q(x) = \alpha + a^T x + x^T A x$ mit $A$ symmetrisch sowie die zugehörige symmetrische Bilinearform

$$\boxed{\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^T A y.}$$

**Definition:** Rang, Index und Signatur von $\beta$ heissen auch *Rang, Index* und *Signatur von $q$*. Analog für die Eigenschaften *positiv definit, positiv semi-definit, ausgeartet*, usw.

**Hauptachsentransformation 3:** (a) Für jede reelle quadratische Form $q$ existieren eine orthogonale Matrix $Q$ und $\beta \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ sowie eine Diagonalmatrix $D$, so dass gilt

$$\boxed{q(Qy) = \beta + b^T y + y^T D y.}$$

(b) Ist zusätzlich $q$ nicht-ausgeartet, so existieren weiter $\gamma \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^n$, so dass gilt

$$q(c + Qy) = \gamma + y^T D y = \boxed{\gamma + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i y_i^2.}$$

Bew.: (a) Wähle $Q$ so dass $Q^TAQ = D$ Diagonalmatrix.

$$\Rightarrow q(Qy) = \alpha + a^T \cdot Qy + y^T \cdot Q^T A Q \cdot y$$
$$= \alpha + (Q^T a)^T y + y^T D y$$

(b) Für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ ist $q(c+Qy) = \alpha + a^T \cdot (c+Qy) + (c+Qy)^T A (c+Qy)$

$$= \alpha + a^T c + a^T Q y + c^T A c + y^T Q^T A c + c^T A Q y + y^T Q^T A Q y$$
$$= \underbrace{(\alpha + a^T c + c^T A c)}_{\gamma} + \underbrace{(a^T Q y + 2 c^T A Q y)}_{0} + \underbrace{y^T D y}$$

linearer Term verschwindet

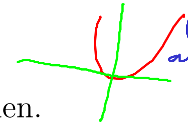
$\Longleftrightarrow a^T + 2c^T A = 0$

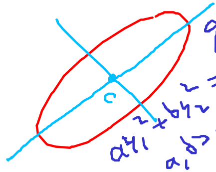
$\Longleftrightarrow 2A^T c + a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = -\frac{1}{2} A^{-1} a.$

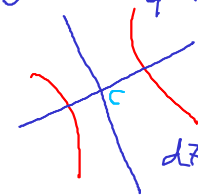
q.e.d.

**Definition:** Die Nullstellenmenge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}$ einer reellen quadratischen Form $q$ wie oben mit $A \neq 0$ heisst eine *reelle Quadrik.*

**Bedeutung:** Der Satz liefert eine Normalform einer Quadrik bis auf Isometrie und Translation. Ist $q$ nicht-ausgeartet, so erhalten wir ein neues kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ mit Ursprung im Punkt $c$ und den Koordinatenachsen $\{Qte_i + c \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $e_i = (\delta_{ij})_j$. Diese Koordinatenachsen heissen *Hauptachsen von $q$*. Diese sind gleichzeitig *Symmetrieachsen* der nicht-ausgearteten Quadrik, da die Quadrik invariant unter der Spiegelung an der jeweils dazu orthogonalen Hyperebene ist.




**Beispiele für Quadriken:**

im $\mathbb{R}^2$: Ellipse, Hyperbel, Parabel, zwei Geraden.

im $\mathbb{R}^3$: Ellipsoid, einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid, Doppelkegel, Paraboloid.

im $\mathbb{R}^4$: Lichtkegel im Minkowski-Raum $\boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\boxed{- x_4^2} = 0$.

$a y_1^2 - b y_2^2 = d$

$a, b > 0.$